Outils Mathématiques pour l'Informatique
TP 1 : Probabilités

Licence 3 Informatique

Maxime Bros, Christophe Clavier
Xlim, Université de Limoges

Novembre 2019

1 Une majoration "grossière"

Pour rappel, l'inégalité de Bienaymé–Chebyshev permet de majorer la probabilité pour une variable aléatoire (dont on connait l'espérance et la variance, toutes deux finies) de "s'éloigner" de son espérance.

Plus précisément, soit μ et σ^2, respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, alors pour toute valeur $\lambda > 1$, l'inégalité de Bienaymé–Chebyshev nous dit que

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu| \geq \lambda\sigma\right) \;\leq\; \frac{1}{\lambda^2}.$$

Intéressons nous maintenant à une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $(n = 10, p = 0.5)$. L'espérance μ de X est $np = 5$ et sa variance σ^2 est $np(1-p) = 2.5$.

Question 1 : Appliquez l'inégalité de Bienaymé–Chebyshev à X pour

$$\lambda = \frac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \approx 2.21.$$

Nous avons donc une majoration de la probabilité que X prenne des valeurs extrêmes (petites ou grandes), nous allons vérifiez cela en pratique.

Question 2 : Écrivez une fonction `binomiale()` qui renvoie le résultat d'un tirage de la variable aléatoire X.

Question 3 : Faites N appels à `binomiale()` et comptez le nombre de fois que la valeur renvoyée est dans l'ensemble $\{0, 1, 9, 10\}$.

Question 4 : En prenant N grand, quelle semble être la probabilité que X prenne les valeurs extrêmes ci-dessus ? Est-ce en contradiction avec l'inégalité de Bienaymé–Chebyshev ?

Bonus : Calculez la probabilité $\mathbb{P}(|X-\mu| \leq \lambda\sigma)$ pour la valeur de λ donnée précédemment.

2 Un caillou ou un cadeau

Imaginez un jeu dans lequel trois boîtes fermées vous sont présentées ; l'une d'entre elle renferme un cadeau et les deux autres des cailloux.

Vous choisissez une boîte mais ne l'ouvrez pas encore, le maître du jeu ouvre alors devant vous une autre boîte, contenant un caillou (il sait où sont les cailloux, donc il peut toujours choisir au moins une autre boîte).

Vient alors le moment crucial du jeu, le maître vous demande si vous souhaitez conserver votre choix initial, ou alors prendre l'autre boîte (que le maître n'a pas ouverte). Vous remportez alors le contenu de la boîte que vous avez choisi.

Question 1 : À votre avis, l'une des deux stratégies (garder votre boîte choisie initialement ou changer) est-elle meilleure en moyenne ? ou alors sont-elles équivalentes ? Répondez avec votre instinct, sans calcul et sans coder.

Question 2 : Écrivez une fonction qui retourne le nombre de fois où un joueur gagne avec la stratégie "garder".

Question 3 : Même chose avec la stratégie "changer".

Question 4 : Comparez les deux stratégies, et si possible, trouvez l'explication de ce résultat.

3 Un aperçu des lois "centrales" en probabilités

Nous nous intéressons ici au nombre de piles ou de faces obtenus après un grand nombre de lancers d'une pièce équilibrée. Nous allons voir comment ce nombre se comporte vis-à-vis de la moitié du nombre de lancers.

Question 1 : Écrivez une fonction qui réalise N lancers et qui calcule à chaque fois la proportition entre le nombre de piles et le nombre total de lancers (naturellement le nombre de faces marcherait aussi).

Question 2 : Tracez la courbe correspondante avec la commande `gnuplot` suivie de

`gnuplot ''nom_fichier'' w l.`

Question 3 : Réalisez cette expérience m fois en écrivant à chaque fois dans un fichier différent, puis tracez toutes les courbes obtenues en même temps grâce au script bash fourni. Vous visualisez alors la “silhouette” de ces courbes.

Question 4 : Reprenez les questions 1 à 3, mais cette fois-ci en vous intéressant à la différence entre le nombre courant de piles et le nombre total de lancers divisé par 2. Par exemple, si après 100 lancers il y a eu 55 piles, on garde la valeur 5.

Un peu de culture mathématiques : les deux parties de cet exercice sont une manière de visualiser deux résultats fondamentaux en théorie des probabilités : la *Loi Faible des Grands Nombres* et le *Théorème Central Limite*.